3.4.11 Výpočty s kruhem

Předpoklady: 030410

Na zítra nůžky a rýsovací potřeby.

Př. 1: Vnitřní zóna havarijního plánování okolo elektrárny Temelín zabírá přibližně $80\ \text{km}^2$. Jak daleko od elektrárny zasahuje (předpokládej, že má kruhový tvar).

Známe obsah kruhu, hledáme jeho poloměr.

$$S = \pi r^2 \qquad / : \pi$$

$$r^2 = \frac{S}{\pi} \qquad / \sqrt{\ }$$

$$r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} = \sqrt{\frac{80}{\pi}}\ \text{km} = 5{,}05\ \text{km}$$

Vnitřní zóna havarijního plánování okolo elektrárny Temelín zasahuje do vzdálenosti 5 km.

Pedagogická poznámka: Většina žáků je překvapena, že vyšlo jenom 5 km. Čekala větší hodnotu.

Př. 2: Urči poloměr kruhové výseče o středovém úhlu $114°$ a obsahu $1\ \text{m}^2$.

Vzorec pro obsah kruhové výseče z minulé hodiny: $S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha$, ze vzorce vyjádříme poloměr.

$$S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \qquad / \cdot 360$$

$$360 \cdot S = \pi r^2 \alpha \qquad / : \pi\alpha$$

$$r^2 = \frac{360 \cdot S}{\pi\alpha} \qquad / \sqrt{\ }$$

$$r = \sqrt{\frac{360 \cdot S}{\pi\alpha}} = \sqrt{\frac{360 \cdot 1}{\pi \cdot 114}}\ \text{m} = 1\ \text{m}$$

Kruhová výseč o obsahu $1\ \text{m}^2$ a středovém úhlu $114°$ má poloměr 1 m.

Pedagogická poznámka: Občas někdo převede obsah z m^2 na menší jednotku (aby se vyhnul jedničce). Velmi často se žáci diví, že vyšel opět 1 m.

Pedagogická poznámka: Žáci, kteří řešili minulý příklad vyjádřením ze vzorce a dosazením, samozřejmě nevyjadřují znova. Většina žáků však nevyjadřuje a proto musí řešit následující příklad.

Př. 3: Ze vzorce pro obsah kruhové výseče vyjádři:
a) středový úhel α b) poloměr r.

a) středový úhel α

$$S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \qquad / \cdot 360$$

$$360 \cdot S = \pi r^2 \alpha \qquad / : \pi r^2$$

$$\alpha = \frac{360 \cdot S}{\pi r^2}$$

b) poloměr r

$$S = \frac{\pi r^2}{360} \cdot \alpha \qquad / \cdot 360$$

$$360 \cdot S = \pi r^2 \alpha \qquad / : \pi \alpha$$

$$r^2 = \frac{360 \cdot S}{\pi \alpha} \qquad / \sqrt{}$$

$$r = \sqrt{\frac{360 \cdot S}{\pi \alpha}}$$

Př. 4: Kruhová výseč o poloměru 10 cm má obsah $350\,\mathrm{cm}^2$. Urči její středový úhel.

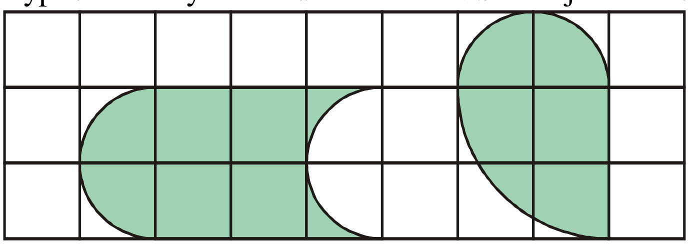
Použijeme vztah vyjádřený v minulém příkladu.

$$\alpha = \frac{360 \cdot S}{\pi r^2} = \frac{360 \cdot 350}{\pi \cdot 10^2} = 401°$$

Zadání příkladu je nesmyslné, protože kruhová výseč nemůže mít středový úhel větší než $360°$.

Pedagogická poznámka: Žáci by měli začít křičet, že příklad je špatný, protože výseč nemůže mít středový úhel větší než $360°$.

Př. 5: Vypočti obsahy obrazců na obrázku. Strana jednoho čtverečku měří 5 cm.



Obsahy vypočti normálně, pak se snaž najít způsob, jak zaokrouhlené výsledky zapsat zcela přesně.

Levý obrazec.
Výčnělek na levé straně, přesně zapadne do prohlubně na pravé straně $\Rightarrow$ získáme obdélník o rozměrech 3 x 2 čtverečky $\Rightarrow$ 15 x 10 cm.

$$S = ab = 15 \cdot 10\,\mathrm{cm}^2 = 150\,\mathrm{cm}^2$$

Pravý obrazec

Obrazec můžeme rozdělit na dvě části: horní půlkruh (poloměr 1 čtvereček - 5 cm) a dolní čtvrtkruh (poloměr 2 čtverečky - 10 cm).

Horní půlkruh: $S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} \mathrm{cm}^2 = 39,3 \mathrm{cm}^2$.

Dolní čtvrtkruh: $S = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \mathrm{cm}^2 = 78,5 \mathrm{cm}^2$.

Celý obrazec: $S = 39,3 + 78,5 \mathrm{cm}^2 = 117,8 \mathrm{cm}^2$.

Zaokrouhlené výsledky jsme získali u pravého obrazce kvůli dosazení konkrétní přibližné hodnoty za π $\Rightarrow$ v úplně přesném výsledku musíme psát místo konkrétních čísel pouze znak π.

Horní půlkruh: $S = \frac{\pi r^2}{2} = \frac{\pi \cdot 5^2}{2} \mathrm{cm}^2 = \frac{25\pi}{2} \mathrm{cm}^2$.

Dolní čtvrtkruh: $S = \frac{\pi r^2}{4} = \frac{\pi \cdot 10^2}{4} \mathrm{cm}^2 = \frac{\pi \cdot 100}{4} \mathrm{cm}^2 = 25\pi \mathrm{cm}^2$.

Celý obrazec: $S = \frac{25}{2}\pi + 25\pi \mathrm{cm}^2 = \frac{25}{2}\pi + \frac{50}{2}\pi \mathrm{cm}^2 = \frac{75}{2}\pi \mathrm{cm}^2$.

Př. 6: Poloměr kruhu *L* je roven průměru kruhu *K*. Kolikrát má kruh *L* větší:
a) obvod; b) obsah; než kruh *K*?

Poloměr kruhu *K* například 1 $\Rightarrow$ poloměr kruhu *L* je 2.

a) srovnání obvodů

$o_K = 2\pi r = 2\pi \cdot 1 = 2\pi$

$o_L = 2\pi r = 2\pi \cdot 2 = 4\pi$

Kruh *L* má dvakrát větší obvod než kruh *K*.

b) srovnání obsahů

$S_K = \pi r^2 = \pi \cdot 1^2 = \pi$

$S_K = \pi r^2 = \pi \cdot 2^2 = 4\pi$

Kruh *L* má čtyřikrát větší obsah než kruh *K*.

Př. 7: Kruh má poloměr 7 cm. Vyjádři úplně přesně bez zaokrouhlování jeho:
a) obvod b) jeho obsah.

a) obvod

$o = 2\pi r = 2\pi \cdot 7 \text{ cm} = 14\pi \text{ cm}$

b) jeho obsah

$S_K = \pi r^2 = \pi \cdot 7^2 \text{ cm}^2 = 49\pi \text{ cm}^2$

Pedagogická poznámka: Následující příklad je pro ty, kterým vyjadřování pomocí písmenek nedělá problémy a příklad 7 zvládli ještě před většinou třídy. Ostatní ho vynechávají a jdou ihned na příklad 9.

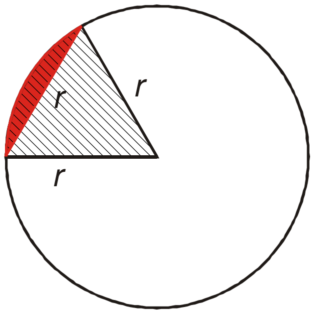
Př. 8: Doplň tabulku přesnými výsledky bez zaokrouhlování.

r	d	o	S
$\frac{3}{2}$			
	7		
		42	
			9

r	d	o	S
$\frac{3}{2}$	3	3π	$\frac{9\pi}{4}$
$\frac{7}{2}$	7	7π	$\frac{49\pi}{4}$
$\frac{21}{\pi}$	$\frac{42}{\pi}$	42	$21^2 = 441$
$\frac{3}{\pi}$	$\frac{6}{\pi}$	6	9

Př. 9: Vypočti obsah kruhové úseče o středovém úhlu $60°$, která je vytknuta na kružnici o poloměru 8 cm.

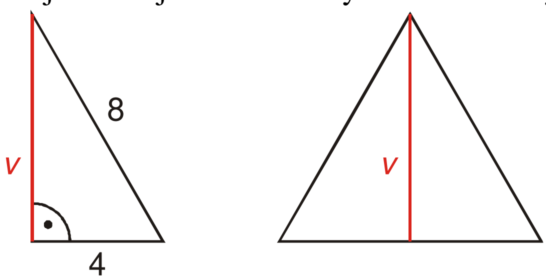
Nakreslíme si obrázek.



Obsah kruhové úseče získáme, když od obsahu výseče odečteme obsah trojúhelníku.

Obsah výseče: $S = \frac{\pi r^2}{360}\alpha = \frac{\pi \cdot 8^2}{360} \cdot 60\ \text{cm}^2 = 33{,}5\ \text{cm}^2$.

Trojúhelník je rovnostranný s délkou strany 8 cm.



Z Pythagorovy věty platí: $v^2 + 4^2 = 8^2$

$v^2 + 16 = 64$

$v^2 = 48$

$v = \sqrt{48}\ \text{cm} = 6{,}92\ \text{cm}$

Obsah trojúhelníku: $S = \dfrac{av_a}{2} = \dfrac{8 \cdot 6,92}{2}\,\text{cm}^2 = 27,7\,\text{cm}^2$.

Obsah úseče: $33,5 - 27,7\ \text{cm}^2 = 5,8\,\text{cm}^2$.

Kruhová úseč o středovém úhlu $60°$, která je vytknuta na kružnici o poloměru 8 cm, má obsah $5,8\,\text{cm}^2$.

Shrnutí: Zcela přesně můžeme vyjadřovat obsahy a obvody kruhu pomocí znaku pro číslo π.